A Sumy

Kiedy algorytm zawiera iteracyjne konstrukcje sterujące, takie jak pętle **while** lub **for**, jego czas działania możemy wyrazić jako sumę czasów potrzebnych na każde wykonanie treści pętli. W podrozdziale 2.2 na przykład zauważyliśmy, że i-ta iteracja w algorytmie sortowania przez wstawianie dla najgorszego przypadku wymaga czasu proporcjonalnego do i. Dodając czasy wykonania kolejnych iteracji, otrzymujemy sumę (lub szereg) $\sum_{i=2}^{n} i$. Obliczenie wartości tej sumy dało oszacowanie $\Theta(n^2)$ na pesymistyczny czas działania algorytmu. Przykład ten pokazuje, na ile ważne jest zrozumienie metod obliczania i szacowania wartości sum.

W dodatku A.1 podamy kilka podstawowych wzorów dotyczących sumowania, a w dodatku A.2 przedstawimy użyteczne techniki szacowania wartości sum. Wzory w dodatku A.1 zamieszczamy bez dowodów, chociaż dowody niektórych z nich zaprezentujemy w dodatku A.2 jako ilustrację zastosowania podanego w nim materiału. Dowody pozostałych wzorów można znaleźć w dowolnej książce z analizy matematycznej.

A.1 Wzory i własności dotyczące sum

Mając dany ciąg liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie n jest nieujemną liczbą całkowitą, skończoną sumę wyrazów tego ciągu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ możemy zapisać jako $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Jeżeli $n = 0$, to wartość sumy definiuje się jako 0. Wartość sumy skończonej jest zawsze dobrze określona i nie zależy od kolejności dodawania jej wyrazów (składników).

Mając dany nieskończony ciąg liczb $a_1, a_2, \ldots$, nieskończoną sumę wyrazów tego ciągu $a_1 + a_2 + \cdots$ możemy zapisać jako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, co oznacza granicę $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Jeśli ta granica nie istnieje, to szereg jest ***rozbieżny***; w przeciwnym razie jest on ***zbieżny***. Wyrazy szeregu zbieżnego nie zawsze można dodawać w dowolnej kolejności. Można jednak tak dodawać wyrazy ***szeregu bezwzględnie zbieżnego***, tzn. takiego szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ również jest zbieżny.

Liniowość

Dla każdej liczby rzeczywistej c i każdej pary skończonych ciągów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

Własność ta zachodzi również dla nieskończonych szeregów zbieżnych.

Własność liniowości można wykorzystywać w przypadku sum zawierających notację asymptotyczną. Na przykład

$$\sum_{k=1}^{n}\Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right).$$

W tej równości notacja Θ po lewej stronie odnosi się do zmiennej k, po prawej zaś do zmiennej n. Takie manipulacje możemy również stosować dla nieskończonych szeregów zbieżnych.

Szereg arytmetyczny

Suma

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

jest ***szeregiem arytmetycznym*** i wynosi

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{A.1}$$

$$= \Theta(n^2). \tag{A.2}$$

W ***ogólnym szeregu arytmetycznym*** w każdym składniku występuje dodatkowa stała addytywna $a \geq 0$ oraz stały współczynnik $b > 0$, jednak jego asymptotyczne zachowanie jest takie samo:

$$\sum_{k=1}^{n}(a + bk) = \Theta(n^2). \tag{A.3}$$

Sumy kwadratów i sześcianów

Oto wzory na sumy kwadratów i sześcianów:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{A.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{A.5}$$

Szereg geometryczny

Dla liczby rzeczywistej $x \neq 1$ suma

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

jest nazywana ***szeregiem geometrycznym*** i wynosi

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \tag{A.6}$$

Jeżeli suma jest nieskończona i $|x| < 1$, to mamy zbieżny nieskończony szereg geometryczny

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}. \tag{A.7}$$

Ponieważ zakładamy, że $0^0 = 1$, wzory te stosują się nawet wtedy, gdy $x = 0$.

Szereg harmoniczny

Dla dodatniej liczby całkowitej n, n-tą ***liczbą harmoniczną*** nazywamy

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{(A.8)} \\ &= \ln n + O(1). \qquad \text{(A.9)} \end{aligned}$$

Nierówności (A.20) i (A.21) na str. 1081 dają lepsze oszacowania

$$\ln(n + 1) \leq H_n \leq \ln n + 1. \tag{A.10}$$

Całkowanie i różniczkowanie szeregów

Nowe tożsamości możemy uzyskać, całkując lub różniczkując poznane już przez nas wzory. Różniczkując na przykład obie strony nieskończonego szeregu geometrycznego (A.7) i mnożąc je przez x, otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1 - x)^2} \tag{A.11}$$

dla $|x| < 1$.

Szereg teleskopowy

Dla dowolnego ciągu $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0, \tag{A.12}$$

ponieważ każdy ze składników $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ jest dodany i odjęty dokładnie raz. Taką sumę nazywamy ***teleskopową***. Podobnie

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n.$$

Jako przykład sumy teleskopowej rozważmy szereg

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Jeśli zapiszemy każdy wyraz w postaci

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

to otrzymamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Przeindeksowanie sum

Szereg można niekiedy uprościć, zmieniając jego indeksowanie, często przez odwrócenie kolejności składników. Rozważmy szereg $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$. Ponieważ składnikami tej sumy są $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, możemy odwrócić kolejność sumowania, podstawiając $j = n - k$ i przepisując tę sumę jako

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} a_j. \tag{A.13}$$

Ogólnie, jeśli indeks sumowania występuje wewnątrz sumy ze znakiem minus, warto pomyśleć o przeindeksowaniu.

Jako przykład rozważmy sumę

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-k+1}.$$

Indeks k występuje ze znakiem minus w wyrażeniu $1/(n-k+1)$. I faktycznie, możemy uprościć tę sumę, wykonując podstawienie $j = n - k + 1$, skąd dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}, \tag{A.14}$$

czyli zwykły szereg harmoniczny (A.8).

Iloczyny

Skończony iloczyn $a_1 a_2 \cdots a_n$ możemy zapisać w postaci

$$\prod_{k=1}^{n} a_k .$$

Jeżeli $n = 0$, to wartość iloczynu definiujemy jako 1. Jeśli wszystkie czynniki są dodatnie, to możemy przekształcić wzór z iloczynem na wzór z sumą, korzystając z tożsamości

$$\lg \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k .$$

Zadania

A.1-1
Korzystając z własności liniowości sumowania, udowodnij, że
$\sum_{k=1}^{n} O(f_k(i)) = O\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(i)\right)$.

A.1-2
Znajdź prosty wzór na wartość sumy $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

A.1-3
Zinterpretuj liczbę dziesiętną 111 111 111 w kontekście wzoru (A.6).

A.1-4
Oblicz wartość szeregu nieskończonego $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$.

A.1-5
Niech $c \geq 0$ będzie stałą. Pokaż, że $\sum_{k=1}^{n} k^c = \Theta(n^{c+1})$.

A.1-6
Wykaż, że $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = x(1+x)/(1-x)^3$ dla $|x| < 1$.

A.1-7
Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k \lg k} = \Theta(n^{3/2} \lg^{1/2} n)$. (*Wskazówka:* Pokaż osobno asymptotyczne górne i dolne oszacowanie).

★ ***A.1-8***
Manipulując wyrazami szeregu harmonicznego, wykaż, że $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + O(1)$.

★ ***A.1-9***
Wykaż, że $\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)/2^k = 0$.

★ ***A.1-10***
Oblicz wartość sumy $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$ dla $|x| < 1$.

★ ***A.1-11***
Oblicz wartość iloczynu $\prod_{k=2}^{n}(1 - 1/k^2)$.

A.2 Szacowanie sum

Istnieje wiele metod szacowania wartości sum opisujących czas działania algorytmów. Poniżej podajemy kilka najczęściej używanych.

Indukcja matematyczna

Podstawową metodą wyznaczania wartości sum jest zastosowanie indukcji matematycznej. Przykładowo wykażemy, że suma szeregu arytmetycznego $\sum_{k=1}^{n} k$ wynosi $\frac{1}{2}n(n+1)$. Dla $n = 1$ mamy $n(n+1)/2 = 1 \cdot 2/2 = 1$, co jest równe $\sum_{k=1}^{1} k$. Przyjmujemy założenie indukcyjne, że wzór zachodzi dla n, i dowodzimy, że zachodzi również dla $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Nie trzeba zawsze zgadywać dokładnej wartości sumy, żeby móc stosować indukcję matematyczną. Możemy z niej również korzystać, gdy szacujemy tę wartość z góry lub z dołu. Przykładowo wykażemy, że suma szeregu geometrycznego $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ wynosi $O(3^n)$, a dokładniej, że $\sum_{k=0}^{n} 3^k \le c3^n$ dla pewnej stałej c. W przypadku brzegowym $n = 0$ mamy $\sum_{k=0}^{0} 3^k = 1 \le c \cdot 1$, o ile $c \ge 1$. Przy założeniu, że oszacowanie jest prawdziwe dla n, udowodnimy, że jest ono również prawdziwe dla $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \\
&\le c3^n + 3^{n+1} \qquad \text{(z założenia indukcyjnego)} \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{n+1} \\
&\le c3^{n+1},
\end{aligned}$$

o ile $(1/3 + 1/c) \le 1$ lub, równoważnie, $c \ge 3/2$. Zatem $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$, co było do okazania.

Należy bardzo ostrożnie używać notacji asymptotycznej, kiedy dowodzi się prawdziwości oszacowań indukcyjnie. Przyjrzyjmy się przykładowo niepoprawnemu dowodowi równości $\sum_{k=1}^{n} k = O(n)$. Na pewno $\sum_{k=1}^{1} k = O(1)$. Zakładając, że to oszacowanie sumy zachodzi dla n, dowodzimy teraz, że zachodzi dla $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&= O(n) + (n+1) \qquad \Longleftarrow \textit{źle!} \\
&= O(n+1).
\end{aligned}$$

Błąd w rozumowaniu polega na tym, że „stała” ukryta w notacji O rośnie razem ze wzrostem n, więc w rzeczywistości nie jest stałą. Nie pokazaliśmy, że ta sama stała jest dobra dla *wszystkich* n.

Szacowanie składników

Czasami dobre ograniczenie górne szeregu można otrzymać, ograniczając każdy z jego wyrazów. Często wystarcza ograniczenie wyrazów szeregu przez największy z nich. Na przykład łatwym do znalezienia ograniczeniem górnym szeregu arytmetycznego (A.1) jest

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &\le \sum_{k=1}^{n} n \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

Ogólnie, dla szeregu $\sum_{k=1}^{n} a_k$, przyjmując $a_{\max} = \max\{a_k : 1 \le k \le n\}$, mamy

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le n a_{\max}.$$

Metoda polegająca na oszacowaniu każdego wyrazu szeregu przez największy wyraz tego szeregu jest słaba, jeśli dany szereg można oszacować przez szereg geometryczny. Przypuśćmy, że mamy dany szereg $\sum_{k=0}^{n} a_k$, w którym $a_{k+1}/a_k \le r$ dla każdego $k \ge 0$, przy czym $0 < r < 1$ jest stałą. Ponieważ $a_k \le a_0 r^k$, naszą sumę można oszacować przez zbieżny nieskończony szereg geometryczny:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k &\le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \\
&= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k & \text{(A.15)} \\
&= a_0 \frac{1}{1-r} . & \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

Możemy skorzystać z tej metody do oszacowania sumy $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k)$. Aby zacząć sumowanie od $k = 0$, zapiszmy tę sumę jako $\sum_{k=0}^{\infty}((k+1)/3^{k+1})$. Pierwszy wyraz jest równy $1/3$, a stosunek dwóch kolejnych wyrazów wynosi

$$\begin{aligned}
\frac{(k+2)/3^{k+2}}{(k+1)/3^{k+1}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{k+2}{k+1} \\
&\le \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

dla każdego $k \ge 0$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
&\le \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

Częstym błędem przy stosowaniu tej metody jest pokazanie, że stosunek każdych dwóch kolejnych wyrazów jest mniejszy od 1, i wnioskowanie z tego, że sumę można oszacować przez szereg geometryczny. Przykładem może tu być nieskończony szereg harmoniczny, który jest rozbieżny, gdyż

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Theta(\lg n) \\
&= \infty .
\end{aligned}$$

Stosunek $(k+1)$-szego i k-tego wyrazu tego szeregu wynosi $k/(k+1) < 1$, lecz szereg ten nie jest ograniczony malejącym szeregiem geometrycznym. W celu ograniczenia danego szeregu szeregiem geometrycznym należy pokazać, że istnieje $r < 1$, które jest *stałe* i takie, że stosunek każdej pary kolejnych wyrazów jest nie większy od r. Dla szeregu harmonicznego nie istnieje takie r, ponieważ stosunek ten staje się dowolnie bliski 1.

Rozdzielanie sum

Jednym ze sposobów oszacowania skomplikowanej sumy jest przedstawienie jej w postaci sumy dwóch lub więcej szeregów powstałych przez rozdzielenie indeksów owej sumy, a następnie oszacowanie osobno każdego z tak powstałych szeregów. Przypuśćmy na przykład, że próbujemy znaleźć dolne ograniczenie szeregu arytmetycznego $\sum_{k=1}^{n} k$, o którym wiemy już, że jego górnym ograniczeniem jest n^2. Możemy spróbować ograniczyć z dołu każdy z wyrazów sumy przez jej najmniejszy wyraz, czyli 1. Otrzymamy wówczas dolne ograniczenie równe n – bardzo odległe od naszej górnej granicy n^2.

Lepsze ograniczenie dolne otrzymamy, rozkładając ten szereg na sumę szeregów. Dla wygody przyjmijmy, że n jest parzyste. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k \\ &\geq \sum_{k=1}^{n/2} 0 + \sum_{k=n/2+1}^{n} (n/2) \\ &= (n/2)^2 \\ &= \Omega(n^2),\end{aligned}$$

co jest asymptotycznie dokładnym ograniczeniem, ponieważ $\sum_{k=1}^{n} k = O(n^2)$.

Sumę otrzymaną przy analizie algorytmu często możemy rozdzielić, a następnie zaniedbać stałą liczbę jej wyrazów początkowych. Tę metodę stosujemy, kiedy wszystkie wyrazy a_k sumy $\sum_{k=0}^{n} a_k$ są niezależne od n. Dla dowolnej stałej $k_0 > 0$ możemy wówczas napisać

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k \\ &= \Theta(1) + \sum_{k=k_0}^{n} a_k,\end{aligned}$$

ponieważ początkowe wyrazy sumy są stałe i ich liczba jest stała. Następnie możemy użyć innych metod w celu oszacowania sumy $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$. Ta metoda ma zastosowanie także do sum nieskończonych. Chcąc na przykład znaleźć asymptotyczne górne ograniczenie sumy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$, należy zauważyć, że dla $k \geq 3$ stosunek kolejnych wyrazów tej sumy wynosi

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} &= \frac{(k+1)^2}{2k^2} \\ &\leq \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Sumę można zatem rozbić na

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+3)^2}{2^{k+3}} \qquad \text{(przeindeksowanie)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + \frac{9}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^k && \text{(z nierówności (A.15))}\\
&= (0 + 1/2 + 1) + \frac{9/8}{1 - 8/9} && \text{(ze wzoru (A.16))}\\
&= O(1).
\end{aligned}
$$

Metodę rozdzielania sum można zastosować do badania asymptotycznych oszacowań w przypadkach dużo bardziej skomplikowanych niż ten rozważany powyżej. Możliwe jest na przykład uzyskanie oszacowania $O(\lg n)$ dla szeregu harmonicznego (A.9):

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Pomysł polega na rozdzieleniu zakresu indeksów od 1 do n na $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ części i ograniczeniu sumy każdej części przez 1. Dla $i = 0, 1, \ldots, \lfloor \lg n \rfloor$ część i-ta składa się z kolejnych wyrazów, poczynając od $1/2^i$, ale bez wyrazu $1/2^{i+1}$. Ostatnia część może zawierać wyrazy spoza oryginalnego szeregu harmonicznego. Zatem mamy

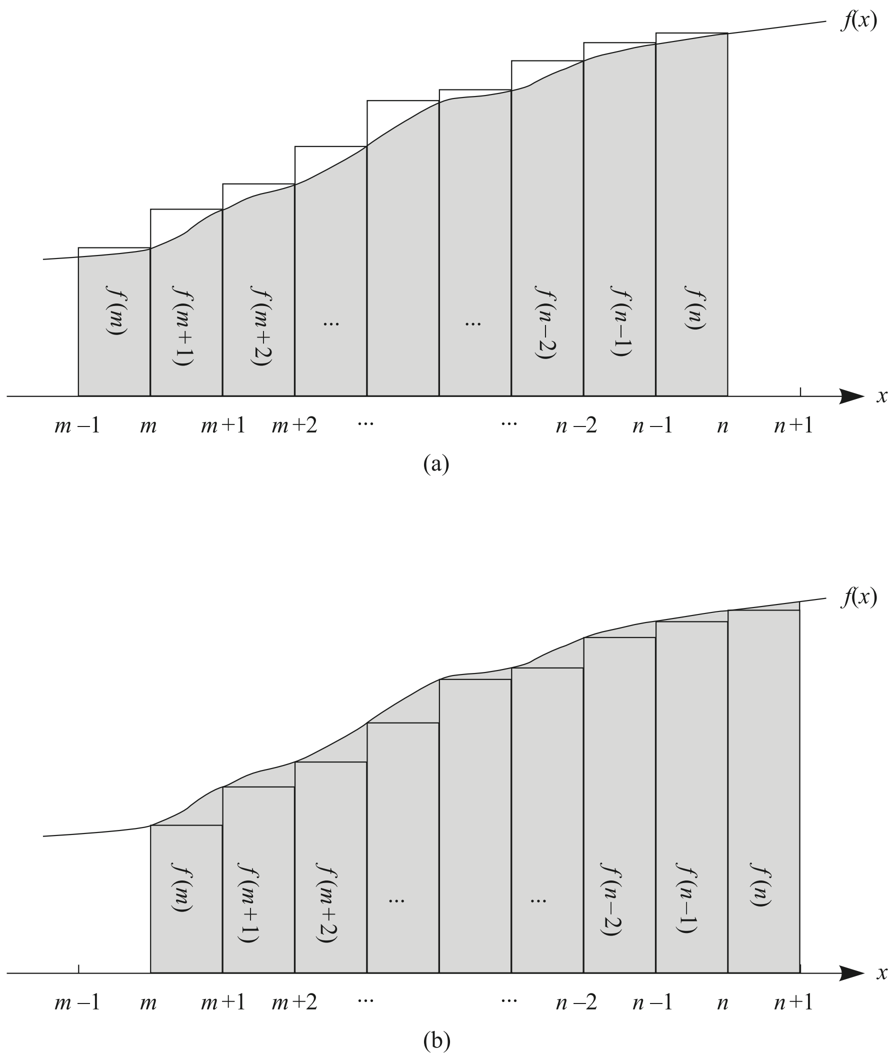
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i + j}\\
&\le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i}\\
&\le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(2^i \cdot \frac{1}{2^i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 1\\
&\le \lg n + 1.
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

Przybliżanie za pomocą całek

Jeżeli suma daje się wyrazić w postaci $\sum_{k=m}^{n} f(k)$, gdzie $f(k)$ jest funkcją monotonicznie rosnącą (niemalejącą), możemy oszacować ją za pomocą całek

$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx. \tag{A.18}$$

Uzasadnienie tego oszacowania jest pokazane na rys. A.1. Suma jest tam przedstawiona jako pole układu prostokątów, a całka to szary obszar pod krzywą. Jeżeli $f(k)$ jest funkcją monotonicznie



Rysunek A.1 Przybliżenie sumy $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ za pomocą całek. W każdym prostokącie jest zapisane jego pole, a pole wszystkich prostokątów reprezentuje wartość sumy. Całka to szary obszar pod krzywą. Jeśli porównamy ze sobą obszary z części (a), otrzymamy nierówność $\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k)$, a przesuwając prostokąty o jeden w prawo, dostaniemy oszacowanie $\sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$, co zostało pokazane w części (b) malejącą (nierosnącą), to na podobnej zasadzie możemy podać oszacowanie

$$\int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)\,dx. \tag{A.19}$$

Nierówności (A.19) dają dokładne oszacowanie n-tej liczby harmonicznej. Dolnym oszacowaniem jest

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\ge \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} \\ &= \ln(n+1). \end{aligned} \tag{A.20}$$

Górne oszacowanie za pomocą przybliżenia przez całkę uzyskujemy następująco:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + 1 \\ &\le \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} + 1 \\ &= \ln n + 1. \end{aligned} \tag{A.21}$$

Zadania

A.2-1
Wykaż, że suma $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ jest ograniczona z góry przez stałą.

A.2-2
Znajdź asymptotyczne górne ograniczenie sumy

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^k \rceil .$$

A.2-3
Wykaż metodą rozdzielania sumy, że wartość n-tej liczby harmonicznej wynosi $\Omega(\lg n)$.

A.2-4
Przybliż sumę $\sum_{k=1}^{n} k^3$ za pomocą całek.

A.2-5
Dlaczego, aby otrzymać górne oszacowanie n-tej liczby harmonicznej, nie zastosowaliśmy nierówności (A.19) bezpośrednio do $\sum_{k=1}^{n} 1/k$?

Problemy

A-1 Szacowanie sum

Podaj asymptotycznie dokładne oszacowania wartości następujących sum, przy założeniu że $r \geq 0$ i $s \geq 0$ są stałymi.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^r$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lg^s k$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^r \lg^s k$.

Uwagi do dodatku

Książka Knutha [259] jest doskonałym odniesieniem do materiału prezentowanego w tym dodatku. Podstawowe wiadomości o szeregach można znaleźć w każdej dobrej książce z analizy matematycznej, na przykład u Apostola [19] lub Thomasa i in. [433].